FACULTÉ DES SCIENCES JURIDIQUES, ÉCONOMIQUES ET SOCIALES AIN CHOCK
UNIVERSITÉ HASSAN II DE CASABLANCA

LICENCE D'ETUDES FONDAMENTALES ES SCIENCES ECONOMIQUES ET DE GESTION -SEMESTRE 2-

*ENSEMBLE-7-*

Module: Mathématiques financières

# Chapitre 2 : Les intérêts composés

Professeur : Abdelouhab HAMLIRI

| | |
|---|---|
| | **Module: Mathématiques financières** |
| | **Plan du cours**<br>- **Chapitre 1 : Les intérêts simples**<br>- **Chapitre 2 : Les intérêts composés**<br>- **Chapitre 3 : Les annuités**<br>- **Chapitre 4 : Les emprunts**<br>- **Chapitre 5 : Les choix d'investissement** |

## Chapitre 1 : Les intérêts composés

### Section 1 : Principes

- On dit qu'un prêt est à intérêts composés lorsqu'à la fin de chaque période, les intérêts simples de cette période sont à nouveau placés avec le capital pour produire conjointement des intérêts au cours de la période suivante, et ainsi de suite.
- La technique des intérêts composés est généralement utilisée pour les opérations financières à long terme (plus d'un an).

**Exemple :**

La société MQM a placé une somme de 120 000,00dhs pendant 3 ans au taux de 3,5%. Les intérêts sont calculés annuellement.

- Calculez les intérêts simples relatifs à ce placement.
- Calculez les intérêts composés pour ce même placement

**Corrigé :**

❖ **L'intérêt simple:**

I = Ctn

I = 120 000 x 3,3% x 3

I = 11 880

❖ **L'intérêt composé :**

- A la fin de la $1^{ère}$ année: I= 120 000 x 3,3% x 1 = 3 960
- A la fin de la $2^{ème}$ année : I = (12 000+3960) x 3,3% x 1 = 4 090,68
- A la fin de la $3^{ème}$ année : I = (120 000+3960+4090,68) x 3,3% x 1 = 4 225,67

L'intérêt composé pour la période de 3 ans est : I= 3 960 + 4 090,68 + 4 225,67

I = 12 276,35

A l'intérêt composé le montant global des intérêts produit par le même capital est supérieur à celui des intérêts simples de 11 880.

### Section 2 : Capitalisation et valeur acquise à intérêt composé

❖ **Concept de capitalisation**

- La capitalisation est le fait de calculer la valeur acquise par une somme, placée au taux t, au bout de n périodes ;
- Capitaliser un revenu revient à renoncer à le percevoir. Dans ce cas, ce revenu devient un capital qui produira à son tour un revenu pour les périodes suivantes.
- La capitalisation des intérêts à la fin de chaque période est la caractéristique fondamentale du prêt à intérêts composés.

- Généralement la capitalisation est annuelle mais les parties peuvent convenir, dans un contrat, d'une capitalisation semestrielle, trimestrielle, voire mensuelle.

**Exemple :**

- Calculer la valeur acquise par un capital de 150.000,00dhs, placé à intérêts composés durant 10 ans, au taux de 10%.

**Corrigé :**

| **Année** | **Capital en début de période (1)** | **Revenus (2) = (1) * 10%** | **Capital de fin de période (1) + (2)** |
|---|---:|---:|---:|
| 1 | 150 000,00 | 15 000,00 | 165 000,00 |
| 2 | 165 000,00 | 16 500,00 | 181 500,00 |
| . . . | . . . | . . . | . . . |
| 9 | 321 538,32 | 32 153,83 | 353 692,15 |
| 10 | 353 692,15 | 35 369,21 | 389 061,36 |

❖ **Valeur acquise à intérêt composé :**

La valeur acquise (ou future) d'un capital correspond à la valeur que prendra un capital qui reste placé pendant *n* périodes à un taux constant *i*.

- **Formule de la valeur acquise :**

Soit :

- $C_0$ = le capital initial
- i = le taux d'intérêt
- n = le nombre de périodes
- $C_n$ = la valeur acquise par $C_0$ à la fin de n périodes

| **Année** | **Capital en début de période (1)** | **Revenus (2) = (1) * i** | **Capital de fin de période (1) + (2)** |
|---|---|---|---|
| 1 | $C_0$ | $C_0\, i$ | $C_0 + C_0\, i = C_0\,(1+i)$ |
| 2 | $C_0\,(1+i)$ | $C_0\,(1+i)\, i$ | $C_0\,(1+i) + C_0\,(1+i)\, i = C_0\,(1+i)^2$ |
| 3 | $C_0\,(1+i)^2$ | $C_0\,(1+i)^2\, i$ | $C_0\,(1+i)^2 + C_0\,(1+i)^2\, i = C_0\,(1+i)^3$ |
| . . . | . . . | . . . | . . . |
| n-1 | $C_0\,(1+i)^{n-2}$ | $C_0\,(1+i)^{n-2}\, i$ | $C_0\,(1+i)^{n-2} + C_0\,(1+i)^{n-2}\, i = C_0\,(1+i)^{n-1}$ |
| n | $C_0\,(1+i)^{n-1}$ | $C_0\,(1+i)^{n-1}\, i$ | $C_0\,(1+i)^{n-1} + C_0\,(1+i)^{n-1}\, i = C_0\,(1+i)^{n}$ |

La formule générale de la valeur acquise à intérêts composés est :

$$\boxed{C_n = C_0\,(1+i)^n}$$

***Exemple :***

Calculer la valeur acquise par un capital de 150 000,00dhs, placé à intérêts composés pendant 10 ans au taux de 10% l'an.

On a $\boldsymbol{C_n = C_0 (1+ i)^n}$

$C_{10} = 150\,000\,(1+ 0{,}1)^{10}$

$C_{10} = 389\,061{,}36$

**Application n°1:**

- Calculer la valeur acquise par un capital de 70.000,00dhs placé à intérêts composés pendant 10 ans, au taux annuel de 7%.

**Corrigé :**

$C_n = C_0 ( 1+ i )^n$

$C_{10} = 70\,000\,(1+ 0{,}07)^{10}$

$C_{10} = 137700{,}59$

**Application n°2 :**

- Déterminer la valeur acquise par un capital de 45.000,00dhs, placé à intérêts composés durant 6 semestres, sachant que le taux appliqué est de 5% par semestre.

**Corrigé:**

$C_n = C_0 ( 1+ i )^n$

$C_6 = 45\,000\,(1+ 0{,}05)^6$

$C_6 = 60\,304{,}30$

**Application n°3 :**

- Une somme de 100.000,00dhs est placée pendant 5 ans au taux annuel de 10%.
- Quelle somme obtient-on à l'issue de ce placement?
- Si au bout de cette période le placement qu'on souhaite obtenir est de 200.000,00dhs, quelle somme doit-on placer aujourd'hui?

**Corrigé :**

- $C_n = C_0 ( 1+ i )^n$

$C_5 = 100\,000\,(1+ 0{,}1)^5$

$C_5 = 161\,051{,}00$

- $C_n = C_0 (1+ i )^n \Leftrightarrow C_0 = \frac{Cn}{( 1+ i )n}$

$C_0 = C_n (1+ i)^{-n}$

$C_0 = 200\,000\,(1+ 0,\ 1)^{-5}$

$C_6 = 124\,184{,}26$

❖ **Le taux de rendement actuariel**

Supposons que nous disposons de toutes les informations, à l'exception du taux de l'opération. Ce problème n'est qu'une variante de la formule de capitalisation. Le taux de rendement actuariel t d'un placement correspond au gain obtenu pendant la durée de placement, exprimé sous forme de taux annuel.

**Application n°1:**

- Yassine prête à Nabil une somme de 20.000,00dhs. Ce dernier propose de lui verser 22.000,00dhs dans 3 ans.
- A quel taux annuel ce prêt a-t-il été consenti?

**Corrigé** :

- $\boldsymbol{C_n = C_0 ( 1+ i )^n} \Leftrightarrow (i+i)^n = \frac{Cn}{C0}$

$i = (\frac{Cn}{C0})^{1/n} - 1$

$i = (\frac{22\ 000}{20\ 000})^{1/3} - 1$

i = 3,22%

**Application n°2:**

- Mahmoud a investi 200.000,00dhs en 2014 dans un business qu'il a revendu 5 ans après à 550.000,00dhs.
- Pendant ces 5 ans, il n'a touché aucun revenu et n'a apporté aucun fonds supplémentaire à son business.
- Quelle a été la rentabilité de cet investissement pour Mahmoud?

**Corrigé** :

- $\boldsymbol{C_n = C_0 ( 1+ i )^n} \Leftrightarrow (i+i)^n = \frac{Cn}{C0}$

$i = (\frac{Cn}{C0})^{1/n} - 1$

$i = (\frac{550\ 000}{200\ 000})^{1/5} - 1$

i = 22,42%

## Section 3 : Taux proportionnels et taux équivalents

- **Taux proportionnels**

Deux taux correspondants à des périodes différentes **sont dits proportionnels**, lorsque leur rapport est égal au rapport de leurs périodes de capitalisation respectives. Soit,

- i : taux annuel
- p : le nombre de périodes dans l'année
- $i_p$ : taux proportionnel par période

$$\boxed{\mathbf{I_p = i / p}}$$

Ainsi si:

- $i_s$ = taux semestriel, alors $i_s = i/2$
- $i_t$ = taux trimestriel, alors $i_t = i/4$
- $i_m$ = taux mensuel, alors $i_m = i/12$

**Exemple 1:**

8% par an et 2% par trimestre.

En effet : $\frac{8}{2} = \frac{12}{3}$ (période en mois).

Nous savons qu'en intérêt simple deux taux proportionnels produisent sur un même capital les mêmes intérêts au bout du même temps de placement, c'est-à-dire lui donnant la même valeur acquise.

**Exemple 2:**

- Soit un capital de 50.000,00dhs. Compléter le tableau suivant :

| **Période de placement** | **Taux proportionnels** | **Intérêt produit** | **Valeur acquise** |
|---|---|---|---|
| 1 an | 8% | 50 000 x 0,08 x 1= 4 000 | 54 000,00 |
| 2 semestres | 4% | 50 000 x 0,04 x 2 = 4 000 | 54 000,00 |
| 4 trimestres | 2% | 50 000x 0,02 x 4 = 4 000 | 54 000 |

Il n'en va pas de même pour un placement à intérêts composés

| **Période de placement** | **Taux proportionnels** | **Valeur acquise** |
|---|---|---|
| 1 an | 8% | 50 000 (1+ 0,08) = 54 000,00 |
| 2 semestres | 4% | 50 000 x $(1+ 0,04)^2$ = 54 080 |
| 4 trimestres | 2% | 50 000x $(1+ 0,02)^4$ = 54 121,60 |

Ce n'est pas étonnant puisqu'il y a capitalisation pendant la période de placement.

- **Taux équivalents**

Deux taux correspondant à des périodes de capitalisation différentes, sont dits équivalents lorsqu'ils produisent la même valeur acquise quand ils sont appliqués au même capital. Soit,

- i : taux annuel équivalent
- p : le nombre de périodes de l'année
- $i_p$ : taux équivalent par période

$$\boxed{\mathbf{I_p = (1+i)^{1/p} - 1}}$$

Ainsi si:

- $i_s$ = taux semestriel, alors $i_s = (1+i)^{1/2} - 1$
- $i_t$ = taux trimestriel, alors $i_t = (1+i)^{1/4} - 1$
- $i_m$ = taux mensuel, alors $i_m = (1+i)^{1/12} - 1$

**Exemple 1:**

Taux équivalents au taux annuels de 8%.

| Période de placement | Relation | Taux équivalant |
|---|---|---|
| Semestrielle | $(1+i_s) -1 = (1 + 0,08)^{1/2}-1$ | $i_s$ = 3,92% |
| Trimestrielle | $(1+i_t) -1 = (1 + 0,08)^{1/4}-1$ | $i_t$ = 1,94 % |
| Mensuelle | $(1+i_m) - 1 = (1 + 0,08)^{1/12}-1$ | $i_m$ = 0,64 % |

**Exemple 2 :**

Soit un capital de 50.000,00dhs. Compléter le tableau suivant :

| Période de placement | Taux équivalant | Valeur acquise |
|---|---|---|
| 1 an | 8% | 50 000 (1+ 0,08) = 54 000,00 |
| 2 semestres | 3,92% | $50\,000 \times (1+ 0,0392)^2 = 53\,996,83$ |
| 4 trimestres | 1,94% | $50\,000 \times (1+ 0,0194)^4 = 53\,994,37$ |
| 12 mois | 0,64% | $50\,000 \times (1+ 0,0064)^{12} = 53\,978,09$ |

**Application** :

- Calculez, pour un taux annuel de 12%, l’intérêt équivalent et proportionnel pour **une durée de deux mois, trois mois, six mois**.
- Calculez la valeur acquise par un placement de 10.000,00dhs au bout de ces différentes périodes pour les intérêts composés.

**Corrigé :**

- **Taux proportionnel et Taux équivalant**

| Période de placement | Taux proportionnels | Taux équivalant |
|---|---|---|
| Mensuelle | 1% | $(1 + 0,12)^{1/12} -1 = 0,94\%$ |
| Trimestrielle | 6% | $(1 + 0,12)^{1/4} -1 = 2,87\%$ |
| Semestrielle | 3% | $(1 + 0,12)^{1/2} -1= 5,83\%$ |

- **Taux proportionnel et valeur acquise à intérêt composé**

| Période de placement | Taux proportionnels | Valeur acquise |
|---|---|---|
| 2 mois | 1% | $10\,000 \times (1 + 0,001)^2 = 10\,020,01$ |
| 1 Trimestre | 6% | 10 000 x (1 + 0,06) = 10 600 |
| 1 semestre | 3% | 10 000 x (1 + 0,03) = 10 300 |

- **Taux équivalents et valeur acquise à intérêt composé**

| Période de placement | Taux équivalant | Valeur acquise |
|---|---|---|
| 2 mois | 0,94% | $10\,000 \times (1 + 0,0094)^2 = 10\,188,88$ |
| 1 Trimestre | 2,87% | 10 000 x (1 + 0,0287) = 10 287,00 |
| 1 semestre | 5,83% | 10 000 x (1 + 0,0583) = 10 583,00 |

## Section 4 : Actualisation et valeur actuelle à intérêts composés

L'objectif de l'actualisation est de déterminer le capital initial $C_0$ qui, placé à intérêts composés au taux i durant n périodes, a pour valeur acquise $C_n$.

Actualiser revient à déterminer la valeur aujourd'hui d'une somme dont on connait le montant à une date ultérieure.

❖ **Exemple :**

- Soit un capital de 1.000.000,00dhs à percevoir dans 2 ans.
- Quelle est la valeur de ce capital aujourd'hui si on tient compte d'un taux d'actualisation de 5%.

Nous savons que : $C_n = C_0\,(1+\,i)^{\,n} \Leftrightarrow C_0 = C_n\,(1+\,i)^{-n}$

$C_0 = 1\,000\,000 \text{ x } (1+0{,}05)^{-2}$

$C_0 = 907\,029{,}47$

Cette opération, inverse de la capitalisation, est une actualisation.

❖ **Formule et calcul**

Nous savons que $C_n = C_0\,(1+\,i)^{\,n}$

D'où $\boxed{\mathbf{C_0 = C_n\,(1+\,i)^{-n}}}$

**Application n°1:**

- Quel capital doit-on placer à intérêts composés au taux de 8,5% l'an pendant 8 ans pour obtenir un capital de 145 000,00dhs?

**Corrigé**

$C_0 = C_n\,(1+\,i)^{-n}$

$C_0 = 145\,000 \text{ x } (1+0{,}085)^{-2}$

$C_0 = 123\,171{,}016$

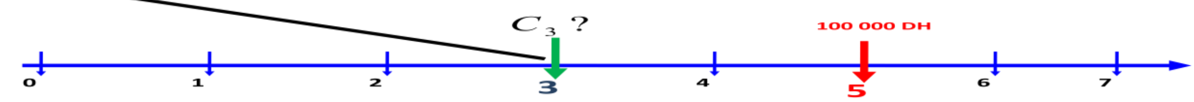
**Application n°2 :**

- Un client doit régler à sa banque un montant de 100 000 DH dans 5 ans. Sachant que le taux des intérêts composés est de 10% l'an, combien, ce client paierait-il, s'il réglait sa dette dans:
- a- 3 ans
- b- 7 ans

**Corrigé:**

❑ a- 3 ans

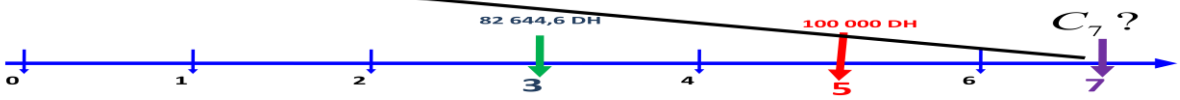
$$C_3 = C_5(1+0{,}1)^{-2} = 100.000\ (1{,}1)^{-2}$$
$$= 100.000 \times 0{,}826446$$
$$= 82.644{,}6$$




- ✓ S’il parerait dans 3 ans la valeur serait de 82 644,64Dhs

- ❑ b- 7 ans

$$C_7 = C_5(1+0.1)^2 = 100.000 \times 1{,}210000$$
$$= 121.000$$




- ✓ S’il parerait dans 3 ans la valeur serait de 121 000Dhs

## Section 5 : Equivalence de capitaux à intérêts composés

Nous avons défini et étudié l’équivalence des effets (ou capitaux) à intérêts simples. Le même raisonnement nous conduit à l’équivalent, à intérêts composés, s’appliquant en principe à des opérations à moyen et long termes

### ❖ Principe :

On admet que deux capitaux sont équivalents à une date déterminée, si actualisés au même taux, permettent d’avoir la même valeur actuelle.

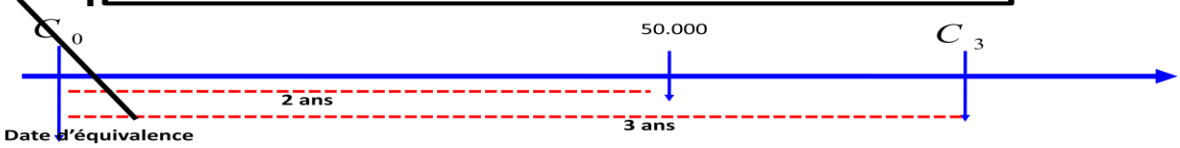
**Exemple**

- Une lettre de change dont le montant est de **50.000 DH** venant à échéance dans **une durée de 2 ans** est remplacée par un autre effet avec une date d’échéance **dans 3 ans**. Sachant que **le taux d’escompte est de 12% l’an**; calculer la valeur nominale de l’effet de remplacement

**À l’époque 0, l’égalité des valeurs actuelles s’écrit :**

$$50.000\,(1+0{,}12)^{-2} = C_3\,(1+0{,}12)^{-3}$$

$$C_3 = \frac{39859{,}7}{0{,}711780} = 56.000 \text{ DH}$$



**Application :**

Un commerçant doit régler à sa banque un montant de 150.000,00dhs dans 5 ans. Sachant que le taux d'intérêt est de 9% l'an, combien ce commerçant doit-il payer, s'il réglait sa dette dans :

- 1. 3 ans
- 2. 4 ans
- 3. 6 ans
- 4. 7 ans

**Corrigé** :

1. 3 ans

$150000(1+0{,}9)^{-5} = C_3(1+0{,}9)^{-3}$

$C_3 = \dfrac{39859{,}7}{0{,}711780} = 56.000 \text{ DH}$

2. 4 ans

$150000(1+0{,}9)^{-5} = C_3(1+0{,}9)^{-3}$

$C_3 = \dfrac{39859{,}7}{0{,}711780} = 56.000 \text{ DH}$

3. 6 ans

$150000(1+0{,}9)^{-5} = C_3(1+0{,}9)^{-3}$

$C_3 = \dfrac{39859{,}7}{0{,}711780} = 56.000 \text{ DH}$

4. 6 ans

$150000(1+0{,}9)^{-5} = C_3(1+0{,}9)^{-3}$

$C_3 = \dfrac{39859{,}7}{0{,}711780} = 56.000 \text{ DH}$

## ❖ Intérêt pratique de l'équivalence à intérêts composés

La notion d'équivalence à intérêts composés constitue la base de tous les calculs d'actualisation. Elle permet, entre autres, de remplacer un ou plusieurs capitaux équivalents. Il suffit que créancier et débiteur se mettent d'accord sur un taux, dés lors, aucune parties ne se sentira lésée.